ある q 超幾何方程式の接続問題とその退化極限

神戸大学 大学院理学研究科 数学専攻
藤井 大計 (Taikei Fujii) *

概要

超幾何型の Jackson 積分は広く研究されており, 様々な分野で活躍する．本講演では, バランス条件の付いた Jordan-Pochhammer 型 Jackson 積分の接続公式について報告する．また, この Jackson 積分と Kajihara の q 超幾何級数の関係およびその退化極限についても述べる．本講演の内容は神戸大学の信川喬彦氏との共同研究に基づく．

1 導入

記号: よく使う記号をまとめる．$q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$ と固定する．

$$(a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i),\ (a)_l = \frac{(a)_\infty}{(aq^l)_\infty},\ l \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

$$(a_1,\dots,a_r)_L = (a_1)_L \cdots (a_r)_L,\ L \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \tag{1.2}$$

$$\theta(x) = (x, q/x)_\infty,\ \theta(x_1,\dots,x_r) = \theta(x_1)\cdots\theta(x_r), \tag{1.3}$$

$$\int_0^\tau f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n,\ \int_0^{\tau\infty} f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n, \tag{1.4}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)d_qt = \int_0^{\tau_2} f(t)d_qt - \int_0^{\tau_1} f(t)d_qt, \tag{1.5}$$

$$T_x f(x) = f(qx). \tag{1.6}$$

Gauss の超幾何級数は次で定義される級数である．

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta \\ \gamma\end{matrix};x\right) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2 + \cdots. \tag{1.7}$$

この級数は, 数学, 物理学, 工学など様々な場面に登場する重要な特殊関数である．この級数は Gauss の超幾何方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす．

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right]f(x) = 0, \tag{1.8}$$

* tfujii@math.kobe-u.ac.jp

この微分方程式は $\mathbb{P}^1$ 上に 3 点の特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式の標準的な表示である．Gauss の超幾何方程式には, 次のような Euler 型積分解を持つ.

$$\int_p^q t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt, \quad p,q\in\{0,1,\frac{1}{x},\infty\} \tag{1.9}$$

Heine の q 超幾何方程式と呼ばれる Gauss の超幾何方程式の 'q 差分版' が知られている:

$$[x(1-aT_x)(1-bT_x)-(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x)]f(x)=0. \tag{1.10}$$

ただし, $T_xh(x)=h(qx)$ である．この方程式は, $q\to 1$ という極限で方程式 (1.8) に退化する．方程式 (1.10) は, 次のような積分解を持つ.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} t^{\alpha-1}\frac{(qt,bxt)_\infty}{(ct/a,xt)_\infty}d_qt, \quad \tau_1,\tau_2\in\{0,1,q/bx\}, \tag{1.11}$$

$$\frac{\theta(bx)}{\theta(x)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} s^{\beta-\gamma}\frac{(qat/c,qt/x)_\infty}{(t,qt/bx)_\infty}d_qt, \quad \sigma_1,\sigma_2\in\{0,x,c/a\}. \tag{1.12}$$

例えば, 次のような解の間の線形関係を持つ:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{(qt,bxt)_\infty}{(ct/a,xt)_\infty}d_qt &= \left(\frac{b}{q}\right)^\alpha \frac{\theta(b)}{\theta(b/a)}x^\alpha\frac{\theta(ax)}{\theta(x)}\times\int_0^{q/bx} t^{\alpha-1}\frac{(qt,bxt)_\infty}{(ct/a,xt)_\infty}d_qt \\ &+\left(\frac{a}{c}\right)^{\beta-\gamma+1}\frac{\theta(c/b)}{\theta(a/b)}\times\frac{\theta(bx)}{\theta(x)}\int_0^{c/a} s^{\beta-\gamma}\frac{(qat/c,qt/x)_\infty}{(t,qt/bx)_\infty}d_qt.\end{aligned} \tag{1.13}$$

このような解の間の線形関係を求めることは基本的で重要な問題であり接続問題と呼ぶ．本稿では, Heine の q 超幾何方程式 (1.10) を拡張した方程式に対する接続問題を考える.

[6] において, 次の $M+1$ 階の q 差分方程式が導入された.

$$E_My=0, \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}E_M &= x^{M+2}T_x^{-1}\prod_{i=0}^{M}(B-Aq^iT_x) \\ &+\sum_{k=1}^{M+1}(-1)^kx^{M+2-k}[e_k(a)T_x^{-1}-qe_k(b)]\prod_{i=0}^{M-k}(B-Aq^iT_x)\prod_{i=0}^{k-2}(1-q^{-i}T_x) \\ &+(-1)^M\frac{a_2\cdots a_{M+3}}{B}T_x^{-1}\prod_{i=0}^{M}(1-q^{-i}T_x).\end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで, $a=(a_2,a_3,\ldots,a_{M+3})$, $b=(b_2,b_3,\ldots,b_{M+3})$ であり e_k は k 次基本対称式である．また, $Aa_2\cdots a_{M+2}=q^2Bb_2\cdots b_{M+3}$ とする．この方程式は次のバランス条件 $Aa_2\cdots a_{M+2}=q^2Bb_2\cdots b_{M+3}$ のついた積分解を持つ:

$$\varphi_{i,j}=\int_{q/a_i}^{q/a_j}\frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{k=2}^{M+3}\frac{(a_kt)_\infty}{(b_kt)_\infty}d_qt, \quad \tilde{\varphi}_{i,j}=x^\lambda\int_{b_i}^{b_j}\frac{(qt/(Bx))_\infty}{(qt/(Ax))_\infty}\prod_{k=2}^{M+3}\frac{(qt/(b_k))_\infty}{(qt/(a_k))_\infty}d_qt \tag{1.16}$$

また, [6] において, この方程式 (1.14) は Kajihara の q 超幾何級数 $W^{M,2}$ を解に持つことが示された．Kajihara の q 超幾何級数は, Macdonald 理論に背景を持ち, 双対変換公式などの良い性質を持つ多重級数である．本稿では, $E_My=0$ とその退化 $E'_My=0$ についての接続問題を考える．また, Kajihara の q 超幾何級数との関係についても述べる.

2 $E_M y = 0$ について

2.1 積分の接続公式

この章では, 方程式 $E_M y = 0$ (1.14) の積分解 (1.16) の間の線形関係式を導出する. $E_M y = 0$ に対する接続公式を以下の方法で導出した. [5] で与えられた, Jordan-Pochhammer 型 Jackson 積分の間の接続公式を特殊化する. 次に, この特殊化された接続公式の余分な項を消去する. この消去には, 作用素 E_M の性質を使う. 得られた接続公式は次で与えられる.

Theorem 2.1 ([2]). バランス条件 $a_1 \cdots a_{M+3} = q^2 b_1 \cdots b_{M+3}$ のついた積分 (1.16) に対して, 次の接続公式が成り立つ:

$$\sum_{k=2}^{M+3} \tilde{C}_k \int_{q/a_1}^{q/a_k} \prod_{i=1}^{M+3} \frac{(a_i t)_\infty}{(b_i t)_\infty} d_q t = 0, \tag{2.1}$$

ここで,

$$\tilde{C}_k = \frac{C_k}{C_1} = \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^2 \prod_{i=1}^{M+3} \frac{\theta(a_k/b_i)}{\theta(a_1/b_i)} \prod_{\substack{1\le i\le M+3 \\ i\ne 1}} \theta(a_1/a_i) \prod_{\substack{1\le i\le M+3 \\ i\ne k}} \theta(a_k/a_i)^{-1}. \tag{2.2}$$

2.2 Kajihara の q 超幾何級数との関係

次の級数は Kajihara の q 超幾何関数 [4] と呼ばれる.

$$\begin{aligned}
&W^{M,N}\left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1\le i\le M} \\ \{x_i\}_{1\le i\le M} \end{array} \middle| \, s; \{u_k\}_{1\le k\le N}; \{v_k\}_{1\le k\le N}; z \right) \\
&= \sum_{l\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^M} z^{|l|} \frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)} \prod_{1\le i\le M} \frac{1-q^{|l|+l_i} s x_i}{1-s x_i} \\
&\qquad \times \prod_{1\le j\le M} \left(\frac{(sx_j)_{|l|}}{((sq/a_j)x_j)_{|l|}} \prod_{1\le i\le M} \frac{(a_j x_i/x_j)_{l_i}}{(q x_i/x_j)_{l_i}} \right) \\
&\qquad \times \prod_{1\le k\le N} \left(\frac{(v_k)_{|l|}}{(sq/u_k)_{|l|}} \prod_{1\le i\le M} \frac{(u_k x_i)_{l_i}}{((sq/v_k)x_i)_{l_i}} \right),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ただし, $|l| = l_1 + \cdots + l_M$, $\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le M} (x_i - x_j)$, $xq^l = \{x_1 q^{l_1}, \ldots, x_M q^{l_M}\}$.

[6] において, 積分 $\varphi_{i,j}$ と $W^{M,N}$ の間の関係が得られた.

$$W\left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1\le i\le M+3} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+3} \end{array} \right) = \frac{-1}{q(1-q)(q)_\infty} \int_{q/a_1}^{q/a_2} \prod_{i=1}^{M+3} \frac{(a_i t)_\infty}{(b_i t)_\infty} d_q t. \tag{2.4}$$

ただし,

$$W\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+3}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+3}\end{array}\right)$$
$$=\frac{(a_1/a_2,a_3/b_2,a_2q/a_1,b_1b_2q^2/(a_1a_2),b_2b_3q^2/(a_1a_2))_\infty}{a_1(b_1q/a_1,b_1q/a_2,b_2q/a_1,b_2q/a_2,b_3q/a_1,b_3q/a_2)_\infty}\prod_{i=4}^{M+3}\frac{(b_2q^2b_i/(a_1a_2),qa_i/a_1,qa_i/a_2)_\infty}{(b_2q^2a_i/(a_1a_2),qb_i/a_1,qb_i/a_2)_\infty}$$
$$\times W^{M,2}\left(\begin{array}{c}\{a_i/b_i\}_{4\le i\le M+3}\\ \{a_i\}_{4\le i\le M+3}\end{array}\middle|\ \frac{b_2q}{a_1a_2};\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_3};\frac{b_2q}{a_1},\frac{b_2q}{a_2};\frac{a_3}{b_2}\right), \tag{2.5}$$

であり, $a_1\cdots a_{M+3}=q^2b_1\cdots b_{M+3}$. 接続公式 (2.1) とこの公式によって, 次の線形関係式をえる.

Theorem 2.2 ([2]). 次の線形関係式が成り立つ.

$$\sum_{i=2}^{M+3}D_kW\left(\begin{array}{c}a_1,a_k,a_2,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots a_{M+3}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+3}\end{array}\right)=0, \tag{2.6}$$

ここで

$$D_k=\left(\frac{a_k}{a_1}\right)^2\prod_{i=1}^{M+3}\frac{\theta(a_k/b_i)}{\theta(a_1/b_i)}\prod_{\substack{1\le i\le M+3\\ i\ne 1}}\theta(a_1/a_i)\prod_{\substack{1\le i\le M+3\\ i\ne k}}\theta(a_k/a_i)^{-1}. \tag{2.7}$$

ただし, $a_1\cdots a_{M+3}=q^2b_1\cdots b_{M+3}$.

3 $E_My=0$ の退化について

3.1 積分の接続公式

[6] において, $E_My=0$ の退化が計算されている. その一つに次の $M+1$ 階の q 差分方程式がある.

$$E'_My=0 \tag{3.1}$$
$$\begin{aligned}E'_M&=x^{M+2}(1-q^\alpha T_x)\prod_{i=0}^{M}(B-Aq^iT_x)\\&+\sum_{k=1}^{M+1}(-1)^kx^{M+2-k}(e_k(a)-q^\alpha e_k(b)T_x)\prod_{i=0}^{M+2-k}(B-Aq^iT_x)\prod_{i=0}^{k-1}(1-q^{-i}T_x)\\&+(-1)^{M+2}\frac{a_2a_3\cdots a_M}{B}T_x^{-1}\prod_{i=0}^{M+1}(1-q^iT_x)\end{aligned} \tag{3.2}$$

この方程式は次の積分解を持つ:

$$I_{i,j}=\int_{q/a_i}^{q/a_j}t^{\alpha-1}\frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{k=2}^{M+2}\frac{(a_kt)_\infty}{(b_kt)_\infty}d_qt,\quad 0\le i,j\le M+2,\ a_0=0 \tag{3.3}$$

$$\tilde{I}_{i,j}=\frac{\theta(Ax)}{\theta(Bx)}\int_{b_i}^{b_j}\frac{(qt/(Bx))_\infty}{(qt/(Ax))_\infty}\prod_{k=2}^{M+2}\frac{(qt/(b_k))_\infty}{(qt/(a_k))_\infty}d_qt,\quad 1\le i,j\le M+3,\ b_{M+3}=\sigma\infty \tag{3.4}$$

この方程式に対しても, 以下の接続公式を導出できる.

Theorem 3.1. バランス条件 $a_1a_2\cdots a_{M+2}=q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ のついた積分 $I_{i,j}$, $\tilde{I}_{i,j}$ は次の接続公式を満たす.

$$\sum_{k=2}^{M+2}\check{C}_k\int_{b_1}^{b_k}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(qt/b_i)_\infty}{(qt/a_i)_\infty}d_qt+\check{C}_{M+3}\int_{b_1}^{\sigma\infty}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(qt/b_i)_\infty}{(qt/a_i)_\infty}d_qt=0, \tag{3.5}$$

$$\int_0^{q/a_p}t^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt=\sum_{\substack{1\le k\le M+2\\ k\neq r}}\check{L}_{k,p}\times\frac{\theta(a_1)}{\theta(b_1)}\int_{b_r}^{b_k}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(qt/b_i)_\infty}{(qt/a_i)_\infty}d_qt, \tag{3.6}$$

ここで

$$\check{C}_k=\left(\frac{b_1}{b_k}\right)^2\frac{\theta(\sigma/b_k)}{\theta(\sigma/(q^{\alpha-1}b_k))}\frac{\theta(\sigma/b_1)}{\theta(\sigma/(q^{\alpha-1}b_1))}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{\theta(a_i/b_k)}{\theta(a_i/b_1)}\prod_{i=2}^{M+2}\theta(b_i/b_1)\prod_{i=1}^{M+2}\theta(b_i/b_k)^{-1},\quad 1\le k\le M+2, \tag{3.7}$$

$$\check{C}_{M+3}=\left(\frac{b_1}{\sigma}\right)^2\theta(q^\alpha)\frac{\theta(\sigma/b_1)}{\theta(\sigma/(q^{\alpha-1}b_1))}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{\theta(a_i/\sigma))}{\theta(a_i/b_1)}\prod_{i=2}^{M+2}\theta(b_i/b_1)\prod_{i=1}^{M+2}\theta(b_i/\sigma)^{-1}, \tag{3.8}$$

$$\check{L}_{k,p}=\frac{1}{qb_k}\left(\frac{q}{a_p}\right)^\alpha\frac{\theta(q^{\alpha+1}b_k/a_p)}{\theta(q^\alpha)}\frac{\theta(b_1)}{\theta(a_1)}\prod_{\substack{1\le j\le M+2\\ j\neq p}}\theta\left(\frac{a_j}{b_k}\right)\prod_{\substack{1\le j\le M+2\\ j\neq k}}\theta\left(\frac{b_j}{b_k}\right)^{-1}. \tag{3.9}$$

積分 $I_{0,j}$, $2\le k\le M+2$ は $E'_My=0$ の $x=0$ における基本解系を与える. また, $\tilde{I}_{M+2,k}$, $2\le k\le M+3$, $k\neq M+2$ は $x=\infty$ における基本解系である. よって, 定理 3.1 から原点と無限遠点の間の接続公式を得る.

Corollary 3.2. バランス条件 $a_1a_2\cdots a_{M+2}=q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ を仮定し $a_1=Ax$, $b_1=Bx$ とおく. この時, 次の $E'_My=0$ の接続公式をえる.

$$\begin{pmatrix}I_{0,2} & I_{0,3} & \cdots & I_{0,M+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{I}_{M+2,2} & \tilde{I}_{M+2,3} & \cdots & \tilde{I}_{M+2,M+1} & \tilde{I}_{M+2,M+3}\end{pmatrix}R_1R_2 \tag{3.10}$$

ここで

$$R_1=\begin{pmatrix}\check{r}_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \check{r}_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \check{r}_4 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ \check{r}_{M+3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \check{r}_{M+3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}\check{L}_{1,2} & \check{L}_{1,3} & \cdots & \check{L}_{1,M+2}\\ \check{L}_{3,2} & \check{L}_{2,3} & \cdots & \check{L}_{2,M+2}\\ \check{L}_{4,2} & \check{L}_{4,3} & \cdots & \check{L}_{3,M+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \check{L}_{M+1,2} & \check{L}_{M+1,3} & \cdots & \check{L}_{M+1,M+2}\end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

であり $\check{r}_k=\check{C}_k\Big|_{b_1\leftrightarrow b_{M+2}}$ とする.

3.2 Kajihara の q 超幾何級数との関係

Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi^m_{n,r}$ [4] は次で与えられる:

$$\Phi^m_{n,r}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \{a_i\}_{1\le i\le m} & \{b_k\}_{1\le k\le n} & \{c_s\}_{1\le s\le r} & \\ \{x_i\}_{1\le i\le m} & \{d_k\}_{1\le k\le n} & \{e_s\}_{1\le s\le r} & u \end{array}\right) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^M} u^{|l|}\frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{l_i}}{(qx_i/x_j)_{l_i}}$$
$$\times\left(\prod_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\frac{(b_kx_i)_{l_i}}{(d_kx_i)_{l_i}}\right)\left(\prod_{k=s}^{r}\frac{(c_s)_{|l|}}{(e_s)_{|l|}}\right). \tag{3.12}$$

公式 (2.4) を退化すると次の変換公式が得られる.

$$F_0\left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1\le i\le M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right) = \frac{-1}{q(1-q)(q)_\infty}\int_0^{q/a_1}\prod_{k=1}^{M+2}t^{\alpha-1}\frac{(a_kt)_\infty}{(b_kt)_\infty}d_qt, \tag{3.13}$$

$$F_\infty\left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1\le i\le M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right) = \frac{-1}{q(1-q)(q)_\infty}\int_{b_1}^{b_2}\prod_{k=1}^{M+2}\frac{(qt/(b_k))_\infty}{(qt/(a_k))_\infty}d_qt. \tag{3.14}$$

ここで

$$F_0\left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1\le i\le M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right) = \frac{q^{\alpha-1}}{a_1^\alpha}\frac{(q^\alpha b_1/a_1, a_3/b_1)_\infty}{(q^\alpha, qb_3/a_1, qb_1/a_1)_\infty}\prod_{i=4}^{M+2}\frac{(qa_i/a_1)_\infty}{(qb_i/b_1)_\infty}$$
$$\times\Phi^M_{1,1}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \{a_i/b_i\}_{1\le i\le n} & \{1/b_3\} & \{qb_1/a_1\} & \\ \{a_i\}_{1\le i\le n} & \{q/b_1\} & \{q^{\alpha+1}b_1/a_1\} & a_3/b_1\end{array}\right), \tag{3.15}$$

$$F_\infty\left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1\le i\le M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right) = \frac{(q^{1-\alpha}, b_2/b_1, qb_1/b_2)_\infty}{(qb_1/a_1, qb_2/a_1, qb_1/a_2, qb_2/a_2)_\infty}\prod_{i=4}^{M+2}\frac{(qb_1/b_i, qb_2/b_i)_\infty}{(qb_1/a_i, qb_2/a_i)_\infty}$$
$$\times\Phi^M_{2,0}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \{a_j/b_j\}_{3\le i\le M+2} & \{a_1,a_2\} & \cdot & \\ \{1/b_i\}_{3\le i\le M+2} & \{b_1,b_2\} & \cdot & q^{\alpha-1}\end{array}\right), \tag{3.16}$$

であり $a_1a_2\cdots a_{M+2} = q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ とする.

この公式と退化極限によって, 次の線形関係式を得る.

Theorem 3.3. 次の線形関係式が成り立つ.

$$\sum_{i=2}^{M+2}\check{D}_kF_0\left(\begin{array}{c} a_k, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right) = 0, \tag{3.17}$$

$$F_0\left(\begin{array}{c} a_p, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_{p+1}, \ldots a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)$$
$$= \sum_{\substack{1\le k\le M+2\\ k\ne r}}\check{L}_{k,p}\times F_\infty\left(\begin{array}{c} a_r, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}\ldots, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right). \tag{3.18}$$

ここで

$$\check{D}_k = \frac{a_k^{\alpha+1}}{q^{\alpha-1}\sigma^2}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{\theta(\sigma/a_i)}{\theta(\sigma/b_i)}\prod_{i=1}^{M+2}\theta(a_k/b_i)\prod_{\substack{1\le i\le M+2\\ i\ne k}}\theta(a_k/a_i)^{-1}. \tag{3.19}$$

ただし, $a_1 \cdots a_{M+2} = q^{\alpha+1} b_1 \cdots b_{M+2}$ とする.

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった第 21 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様に深く感謝いたします. 本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 と JSPS 科研費 Grant Number 22H01116 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] Fujii, T., & Nobukawa, T. (2022). Hypergeometric solutions for variants of the q-hypergeometric equation. arXiv preprint arXiv:2207.12777.

[2] T. Fujii, T. Nobukawa, Connection formula for the Jackson integral of Riemann-Papperitz type. arXiv:2404.00969.

[3] Gasper, G., & Rahman, M. (2011). Basic hypergeometric series (Vol. 96). Cambridge university press.

[4] Y. Kajihara, A unified approach to transformations for multiple basic hypergeometric series of type A, in: Representation Theory, Special Functions and Painlevé Equations - RIMS 2015, in: Adv. Stud. Pure Math. **76**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 247-274 (2018).

[5] Mimachi, K. (1989). Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type. Nagoya Mathematical Journal, 116, 149-161.

[6] T. Nobukawa, Jackson integral representation for Kajihara's q-hypergeometric series and an extension of the q-Riemann-Papperitz system, arXiv:2402.14358.